

Progetto: Controllo Predittivo (MPC) di un Pendolo Inverso

Leonardo Leggeri

29 giugno 2026

Sommario

Questo documento descrive la progettazione e simulazione di un controllore Model Predictive Control (MPC) per lo swing-up e la stabilizzazione di un pendolo inverso. Il sistema è soggetto a stringenti vincoli fisici di stato e di controllo, inclusi limiti assoluti sull'azione di controllo e sulla sua variazione massima consentita (*slew rate*). Il progetto impiega il toolbox MPT3 di MATLAB per l'analisi poliedrica degli insiemi invarianti e risolve il problema di ottimizzazione in anello chiuso tramite programmazione quadratica.

1 Introduzione

Il problema del pendolo inverso è un classico banco di prova nell'ambito della teoria del controllo per l'analisi dei sistemi instabili. L'obiettivo principale di questo progetto è portare un pendolo da una posizione iniziale fuori equilibrio (es. 140°) fino alla posizione perfettamente eretta (180°), rispettando simultaneamente i severi limiti operativi dell'attuatore.

L'approccio scelto è il Model Predictive Control (MPC), una strategia di controllo ottimo avanzata in grado di gestire intrinsecamente i vincoli del sistema, calcolando un piano di input ottimale su un orizzonte di predizione N_p ad ogni istante di campionamento.

2 Modello Matematico e Linearizzazione

L'equazione differenziale non lineare che governa il moto del pendolo, considerando come ingresso un'accelerazione cinematica impressa al perno, è data da:

$$\ddot{\theta} = -\frac{u}{l} \cos(\theta) - \frac{g}{l} \sin(\theta) - \frac{b}{ml^2} \dot{\theta} \quad (1)$$

dove θ è l'angolo rispetto alla verticale bassa, u è l'accelerazione di controllo, g è l'accelerazione di gravità, l è la lunghezza del braccio, m è la massa e b è l'attrito viscoso.

2.1 Indipendenza dalla Massa e Sforzo Fisico

È fondamentale notare che, per il Principio di Equivalenza, la massa m compare unicamente al denominatore del termine di attrito aerodinamico. Di conseguenza, trascurando l'attrito per masse elevate, l'equazione differenziale diventa di fatto indipendente dal peso del pendolo. L'autorità di controllo u (espressa in m/s^2) genera forze fittizie che scalano linearmente con la massa: il controllore MPC stabilizzerà il sistema con la stessa facilità a prescindere che il pendolo pesi 1 Kg o 400.000 Kg.

Tuttavia, nella realtà, per imprimere un'accelerazione u al perno, l'attuatore fisico dovrà erogare una forza reale proporzionale alla massa ($F = ma$). Pertanto, per un pendolo di altissima massa, un input $u = 15 \text{ m/s}^2$ corrisponderebbe a una spinta di milioni di Newton, limite superato il quale il sistema reale non riuscirebbe a seguire l'accelerazione comandata.

Per l'implementazione del controllore, il sistema è stato linearizzato analiticamente attorno al punto di equilibrio instabile $\theta_{eq} = 180^\circ$ e discretizzato con passo $T_s = 0.1$ s, ottenendo il sistema LTI discreto:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (2)$$

dove il vettore di stato $x = [\Delta\theta, \Delta\omega]^T$ rappresenta le fluttuazioni relative attorno al punto di lavoro.

3 Formulazione Ottima e Vincoli

Il controllore MPC minimizza ad ogni step temporale la seguente funzione di costo quadratica:

$$J = \sum_{k=0}^{N_p-1} (x_k^T Q x_k + \Delta u_k^T R \Delta u_k) + x_{N_p}^T P x_{N_p} \quad (3)$$

con matrici di peso empiriche $Q = \text{diag}([100, 1])$ per lo stato e $R = 0.1$ per la variazione di controllo. Questa configurazione produce un comportamento molto reattivo ("aggressivo") per azzerare l'errore di posizione.

Per garantire la sicurezza e la realizzabilità ingegneristica, sono imposti i seguenti limiti lineari:

- **Vincoli di Stato:** L'angolo deve restare entro una fascia di $\pm 90^\circ$ dall'equilibrio superiore per garantire la validità del modello linearizzato ($\theta \in [90^\circ, 270^\circ]$). La velocità angolare è limitata a ± 4 rad/s.
- **Vincoli Assoluti sull'Attuatore:** Capacità massima del motore limitata a $|u| \leq 15$ m/s².
- **Slew Rate Constraints (Vincoli in Derivata):** Variazione massima dell'accelerazione limitata a $|\Delta u| \leq 5$ m/s². Limitare il *jerk* previene l'insorgere di strappi che danneggerebbero gli ingranaggi meccanici.

4 Analisi Poliedrica e Invarianza (MPT3)

Per assicurare la stabilità asintotica in presenza di vincoli, il problema MPC è formulato includendo un vincolo di stato terminale:

$$x_{N_p} \in \mathcal{X}_f \quad (4)$$

dove $\mathcal{X}_f$ è il **Control Invariant Set (CIS)**. Il CIS rappresenta la porzione massima dello spazio degli stati per la quale l'uso della legge di controllo lineare LQR non saturata assicura il rispetto di tutti i vincoli futuri all'infinito.

A causa del peso aggressivo $Q = 100$, il LQR locale tende a richiedere coppie elevate per piccole deviazioni. Per non violare i vincoli operativi, il calcolo poliedrico del CIS (effettuato tramite toolbox MPT3) produce geometricamente un'area ristretta ("bersaglio piccolo"). Di conseguenza, per permettere al sistema di partire da deviazioni ampie (es. 140°) e frenare dolcemente rispettando i limiti di $\Delta u = \pm 5$, è obbligatorio prevedere un orizzonte lungo ($N_p = 15$). Se N_p fosse troppo breve (es. $N_p = 10$), il *Controllable Set* non coprirebbe lo stato iniziale e il solutore quadprog andrebbe in *infeasible* fin dal primo istante.

5 Risultati di Simulazione

I grafici prodotti dalla simulazione documentano la bontà della soluzione:

- **Insiemi Poliedrici MPT3 (figure1 e figure2):** Esibiscono la geometria 2D del CIS e l'espansione dei back-reachable sets che determinano l'area di governabilità del pendolo in N_p passi.
- **Traiettoria nel Piano delle Fasi (figure3):** Dimostra come la risposta a gradino del sistema si incanali elegantemente dalle condizioni iniziali fin dentro l'orbita ristretta del CIS, convalidando l'efficacia del solutore QP.
- **Analisi Topologica 3D (figure4):** L'aggiunta dell'asse temporale fornisce un'intuizione fisica potente: il pendolo naviga all'interno dello "scatolone" rosso traslucido dei vincoli limite per atterrare infine all'interno del "tubo" invariante verde, stabilizzandosi al centro (180°).
- **Saturazione dello Slew Rate (figure5):** Sebbene l'azione u rimanga distante dai limiti estremi assoluti (± 15), il grafico in derivata Δu batte costantemente contro il margine di 5 m/s^2 . Il controllore MPC calcola in via ottimale questo limite per erogare il massimo spunto possibile senza mai forzare irrealisticamente i limiti dell'attuatore.

6 Conclusioni

La formulazione proposta implementa correttamente una strategia MPC lineare per l'inversione e il mantenimento di un pendolo. Affrontando contemporaneamente la penalità del tracking d'errore, la saturazione assoluta del comando e la gestione dei rate-constraints, si modella un controllore in grado di interfacciarsi con limiti fisici complessi. Il tracciamento delle performance e i check di validità matematica sugli insiemi invarianti offrono una piattaforma sicura e robusta per lo studio del controllo ottimo multivariabile.

ATTENZIONE: Il presente software, i relativi modelli descritti in questo documento e il codice sorgente collegato sono di proprietà esclusiva dell'Ing. Leggeri Leonardo. È severamente vietata

la copia, la distribuzione, la trasmissione, la modifica, la vendita, la rivendita o la cessione a terzi, a qualsiasi titolo, di questo codice e del progetto in esso contenuto, senza l'esplicito e preventivo consenso scritto dell'autore. **AVVISO PENALE:** L'appropriazione indebita, la distribuzione

non autorizzata o la vendita a terzi di questo software senza autorizzazione costituiscono una violazione diretta del diritto d'autore e del segreto industriale. Tali azioni costituiscono reato e l'autore si riserva il diritto di agire in tutte le sedi opportune (civili e penali) per il risarcimento dei danni subiti, come previsto dalla legge in materia di proprietà intellettuale e diritto d'autore.